WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów i oddziałów gimnazjalnych
województwa pomorskiego w roku szkolnym 2018/2019
etap wojewódzki

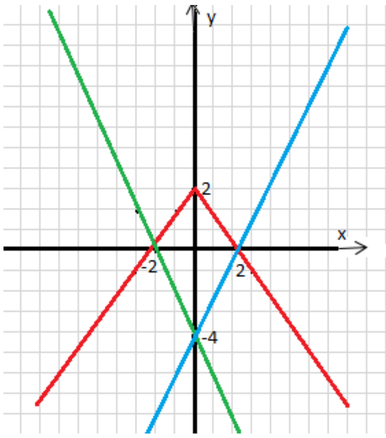
PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA I KRYTERIA OCENIANIA

Zad.1. (0-3)

Na jednym rysunku naszkicuj wykresy funkcji: $y = -|x| + 2$, $y = -2x - 4$, $y = 2x - 4$. Podaj współrzędne czworokąta ograniczonego tymi wykresami. Oblicz jego pole.

Sporządzam częściową tabelkę każdej funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\|x\| + 2$	-1	0	1	2	1	0	-1
$y = -2x - 4$	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
$y = 2x - 4$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2



Powstały czworokąt jest deltoidem o wierzchołkach w punktach: (-2,0), (0,-4), (2,0), (0,2). Przekątne deltoidu mają długości: 6 i 4.

Pole deltoidu = $\frac{1}{2} \cdot$ przekątna$_1$ $\cdot$ przekątna$_2$ = 12.

1p – za sporządzenie wykresów wszystkich trzech funkcji
1p – za odczytanie współrzędnych wierzchołków czworokąta
1p – za obliczenie pola czworokąta

Zad.2. (0-3)

Przy dzieleniu liczb a, b, c przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty: 1, 2, 3. Znajdź resztę z dzielenia sumy kwadratów liczb a, b, c przez liczbę 5. Odpowiedź uzasadnij.

$\frac{a}{5} = x\ r.1$ i $\frac{b}{5} = y\ r.2$ i $\frac{c}{5} = z\ r.3$ stąd otrzymujemy $a = 5x + 1$, $b = 5y + 2$, $c = 5z + 3$.

Suma kwadratów danych liczb = $a^2 + b^2 + c^2 = (5x + 1)^2 + (5y + 2)^2 + (5z + 3)^2 =$

$= 25x^2 + 20x + 1 + 25y^2 + 10y + 4 + 25z^2 + 30y + 9 = 25x^2 + 20x + 25y^2 + 10y + 25z^2 + 30y + (1 + 4 + 9) =$

$= 5(5x^2 + 4x + 5y^2 + 2y + 5z^2 + 6y) + 14 = 5(5x^2 + 4x + 5y^2 + 2y + 5z^2 + 6y) + 5 \cdot 2 + 4 =$

$= 5(5x^2 + 4x + 5y^2 + 2y + 5z^2 + 6y + 2) + 4$

Odp.: Pierwszy składnik sumy jest liczbą podzielną przez 5, zaś liczba 4 jest reszta z dzielenia sumy kwadratów danych liczb przez 5.

1p – za zapisanie liczb a, b, c w postaci sumy
1p – za przedstawienie sumy kwadratów danych liczb w najprostszej postaci
1p – za uzasadnienie, że reszta z dzielenia sumy kwadratów danych licz przez 5 jest równa 4

Zad.3. (0-2)

Suma dwóch różnych liczb naturalnych jest równa 96, a ich największy wspólny dzielni wynosi 12. Znajdź te liczby. Podaj wszystkie rozwiązania.

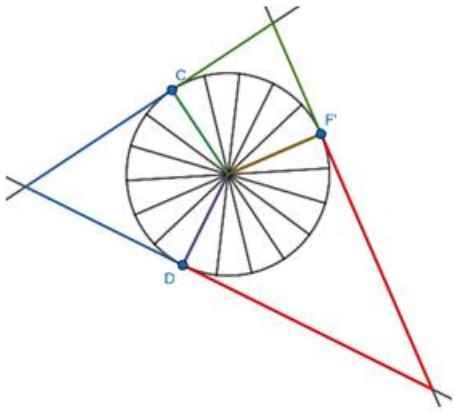
I liczba = 12x
II liczba = 12y
12x + 12y = 96/:12
x + y = 8
(x,y) = { (1,7), (7,1), (2,6),(6,2),(3,5), (5,3),(4,4)} stąd powstają liczby: 12 i 84, 84 i 12, 24 i 72, 72 i 24, 36 i 60, 60 i 36, 48 i 48.
Odp. 12 i 84, 36 i 60.

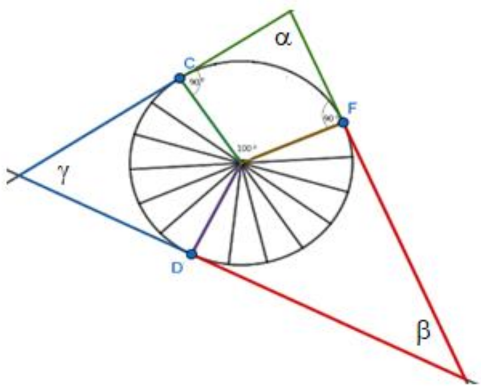
1p – za podanie warunku, jaki spełniają dane liczby
1p – za podanie wszystkich liczb spełniających określony warunek

Zad.4. (0-3)

Okrąg podzielono na trzy części w stosunku 5 :7 : 6. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się w trzech punktach, tworząc trójkąt. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

360°:18 = 20°, zatem obliczamy kąty w okręgu: $5 \cdot 20° = 100°$, $6 \cdot 20° = 120°$ i $7 \cdot 20° = 140°$.
Teraz kolejno w każdym z powstałych czworokątów wyznaczamy kąty oznaczone jako α, β, γ.
Korzystamy z własności stycznej do okręgu oraz z sumy miar katów w czworokącie.
I tak: dla kąta α mamy: $\alpha = 360° – (90° + 90° + 100°) = 80°$
Analogicznie $\beta = 360° – (90° + 90° + 140°) = 40°$ i $\gamma = 360° – (90° + 90° + 120°) = 60°$





Odp: 40°, 60°, 80°.

1p – za wyznaczenie miar kątów w okręgu
1p – za skorzystanie z definicji stycznej do okręgu
1p – za wyznaczenie miar kątów danego trójkąta

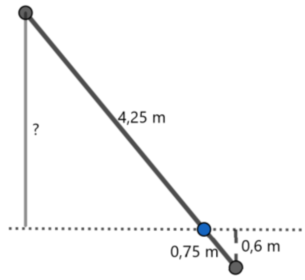
Zad.5. (0-2)

Krótsze ramię szlabanu kolejowego ma długość 0,75 m, a dłuższe 4,25 m. Jak wysoko podnosi się koniec dłuższego ramienia, jeśli koniec ramienia krótszego opuszcza się o 0,6 m? Odpowiedź uzasadnij.

$$\frac{x}{4{,}25} = \frac{0{,}6}{0{,}75}$$

$0{,}75x = 0{,}6 \cdot 4{,}25$

$x = 3{,}4$ [m]



1p – za ułożenie odpowiedniej proporcji
1p – za udzielenie prawidłowej odpowiedzi

Zad.6. (0 – 2)

Maciek ma dwie czworościenne kostki do gry. Na ściankach jednej z nich umieszczono liczby: 2, 4, 6 i 8, na drugiej: 2, 3, 4 i 5. Maciek rzucił tymi kostkami i dodał wynik ze ścianek, na które upadły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymał sumę oczek równą 7? Odpowiedź uzasadnij.

Tabelka przedstawia wszystkie rzuty kostką czworościenną. Wyróżniono wyniki oznaczające sumę oczek równą 7.

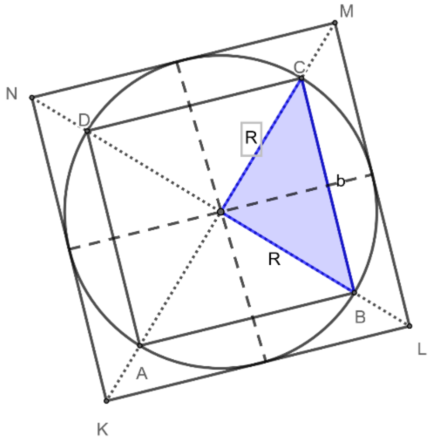
	2	**4**	**6**	**8**
2	4	6	8	10
3	5	7	9	11
4	6	8	10	12
5	7	9	11	13

Wszystkich możliwych wyników jest 16, zaś wyników w których otrzymano liczbę 7 jest dwa. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 7 wynosi $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

1p – za uzasadnienie prowadzące do otrzymania prawidłowego rozwiązania
1p – za poprawną odpowiedź

Zad.7. (0 – 3)

W kwadrat KLMN wpisano koło. W to koło wpisano kwadrat ABCD w taki sposób, że jego boki są równolegle do boków kwadratu KLMN. Różnica pól tych kwadratów wynosi 8 cm^2. Oblicz pole tego koła. Zapisz obliczenia.



Oznaczmy długość boku kwadratu KLMN jako „a”, a długość boku kwadratu ABCD jako „b”.
Promień okręgu wpisanego w kwadrat KLMN oznaczamy jako R, R = $\frac{1}{2}$ a.

W kwadracie ABCD zachodzi równość: $R^2 + R^2 = b^2$, z której otrzymamy, że $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Pole KLMN = a^2, zaś pole ABCD = $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Różnica tych pól wynosi 8 cm^2.

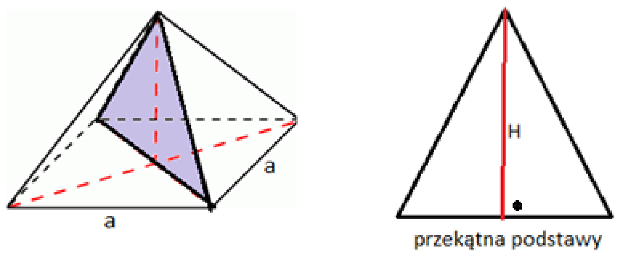
Mamy zatem równanie postaci: $a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8$, którego rozwiązaniem jest a = 4 cm.

Promień okręgu ma długość R = $\frac{1}{2} \cdot 4$ = 2 cm, więc pole koła P = $\pi \cdot R^2 = 4\pi$ (cm^2).

1p – za wyznaczenie długości boku kwadratu ABCD
1p – za obliczenie długości boku KLMN
1p – za obliczenie pola koła

Zad.8. (0 – 3)

Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, przechodzącego przez przekątną podstawy oraz przeciwległe krawędzie boczne, jest równe $10\sqrt{2}$ cm^2. Wysokość ostrosłupa stanowi 80% długości podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



H = 0,8a

Pole przekroju = $\frac{1}{2}\, a\sqrt{2}\ \cdot H = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2}\ \cdot 0{,}8a = 0{,}4\, a^2\, \sqrt{2}$.

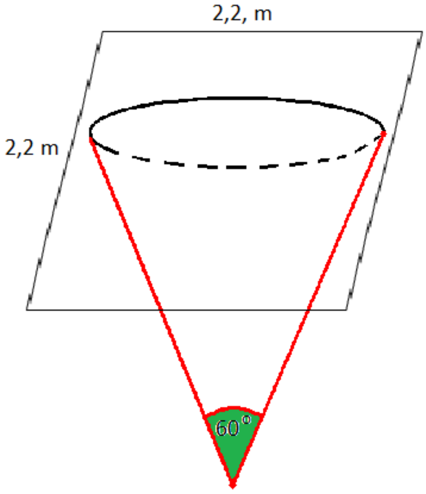
Zatem $0{,}4\, a^2\, \sqrt{2} = 10\,\sqrt{2}$ stąd $a^2 = 25$ czyli a = 5 cm. Wynika stąd, że H = 4 cm.

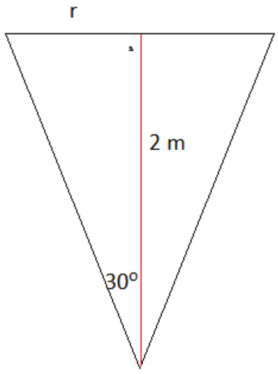
Objętość ostrosłupa V = $\frac{1}{3} \cdot P_{podstawy} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 4 = \frac{100}{3}$ (cm^3).

1p – za skorzystanie z zależności powstałych w trójkącie, będacym przekrojem ostrosłupa
1p – za obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa
1p – za obliczenie objętości ostrosłupa

Zad.9. (0 – 2)

Czy kwadratową płytę o boku 2,2 metra można całkowicie zakryć otwór w ziemi, który ma kształt stożka o wysokości 2 m i kącie rozwarcia 60° ? Odpowiedź uzasadnij.
Uwaga: $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{5} = 2{,}24$.





Z własności trójkąta prostokątnego o kątach: 30^0, 60^0, 90^0 otrzymamy, że r = $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Przybliżona długość r = 1, 15 m zatem średnica jest równa 2,3 m. Płyta kwadratowa o boku 2,2 m jest zbyt mała, aby przykryć nią otwór.

1p – za wyznaczenie długości promienia stożka
1p – za oszacowanie długości promienia stożka i udzielenie odpowiedzi

Zad.10. (0-2)

Wczoraj w trzeciej klasie gimnazjum uczniów obecnych było 8 razy tyle, co nieobecnych. Dzisiaj nie przyszło jeszcze dwóch i teraz nieobecni stanowią 20 % uczniów obecnych. Ile uczniów jest w tej klasie? Zapisz obliczenia.

x – liczba uczniów nieobecnych w dniu wczorajszym
8x – liczba uczniów obecnych w dniu wczorajszym
8x – 2 – liczba uczniów obecnych w dniu dzisiejszym
X + 2 – liczba uczniów nieobecnych w dniu dzisiejszym
20%(8x – 2) = x + 2 /·5
8x – 2 = 5x + 10
3x = 12 /:3
x = 4
Klasa = x + 8x = 9x = 9 · 4 = 36

1p – za sposób wyznaczenia liczby uczniów nieobecnych w dniu wczorajszym (np. równanie)
1p – za wyznaczenie liczby osób nieobecnych w dniu wczorajszym i podanie liczby uczniów tej klasy